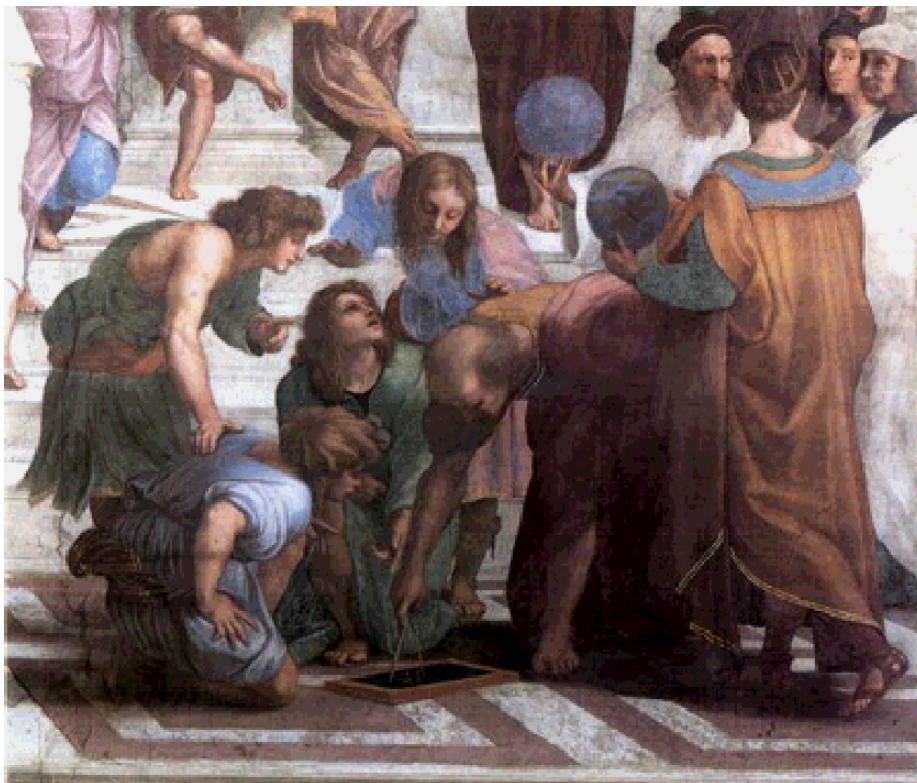


Trissecção do ângulo

A trissecção do ângulo (divisão do ângulo em três partes iguais), juntamente com a quadratura do círculo, a duplicação do volume de um cubo e a construção do heptágono regular são o conjunto de problemas que constituíram preocupação constante na Antiguidade Grega e que ficaram aguardando solução até aos nossos dias.

Notar que a pretensão é resolver estes problemas, geometricamente, recorrendo apenas a um compasso de pontas e uma régua não graduada (únicos instrumentos então usados pelos geómetras). Na figura seguinte, Euclides (sec. IV A.C.) ensina geometria com o compasso de pontas:



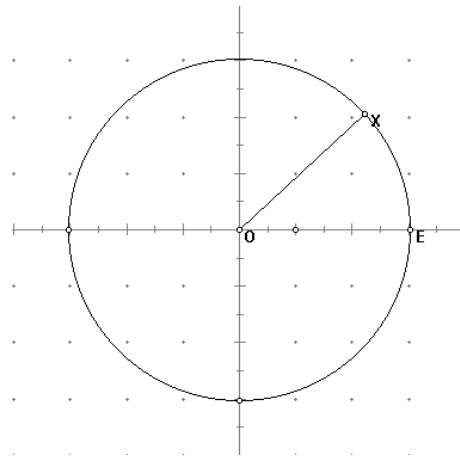
Trissecção do ângulo $XOE = \beta$

A demonstração a seguir apresentada usa apenas estes dois instrumentos mas faz duas marcações na régua (comprimento do raio de um círculo auxiliar) ou efectua o traçado do segmento XA por aproximações sucessivas recorrendo ao compasso de pontas.

DEMONSTRAÇÃO

1º

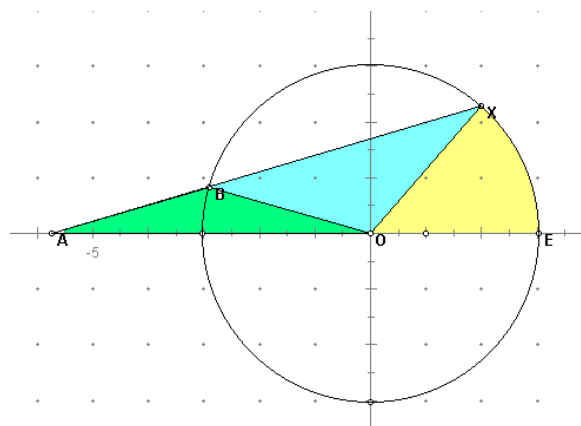
Dispondo do ângulo $XOE = \beta$, traça-se um círculo auxiliar de raio OX , usando o compasso de pontas.

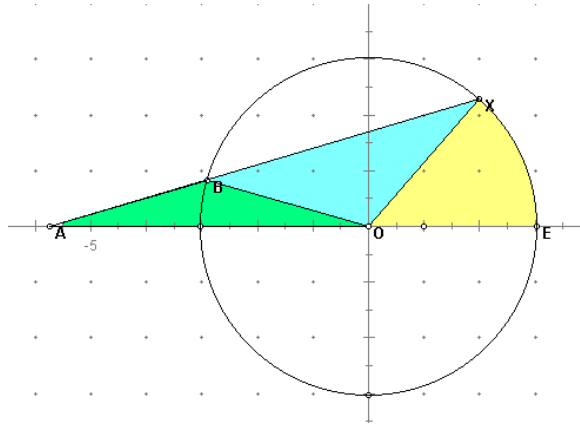


2º

Por X traça-se o segmento XA de modo a que o segmento AB seja igual ao raio OX (usar o compasso e a régua não graduada e executar por aproximações sucessivas ou, definir o raio com duas marcas na régua e alinhar esta por X por forma a que as duas marcas assentem na circunferência e no prolongamento da recta que contém O e E).

Traçar o segmento BO (auxiliar).





O triângulo verde é isósceles ($AB=BO=\text{raio}$) medindo os seus ângulos internos " α ", " α " e " $180-2\alpha$ " respectivamente em A, O e B.

No triângulo azul, o ângulo em B mede " 2α " (é externo do triângulo verde e igual à soma dos ângulos verdes não adjacentes). Porque também é um triângulo isósceles ($BO=OX$) o ângulo em X mede " 2α ". Deste modo conclui-se que o ângulo azul em O mede " $180-2\alpha-2\alpha$ " ou seja " $180-4\alpha$ ".

Em O tem-se $(\alpha) + (180-4\alpha) + (\beta) = 180^\circ$, pelo que $\beta = 3\alpha$.

Para dividir em 3 partes iguais o ângulo " β ", basta pois dividi-lo em ângulos de medida " α ".