Descomplicando a Trigonometria (5)

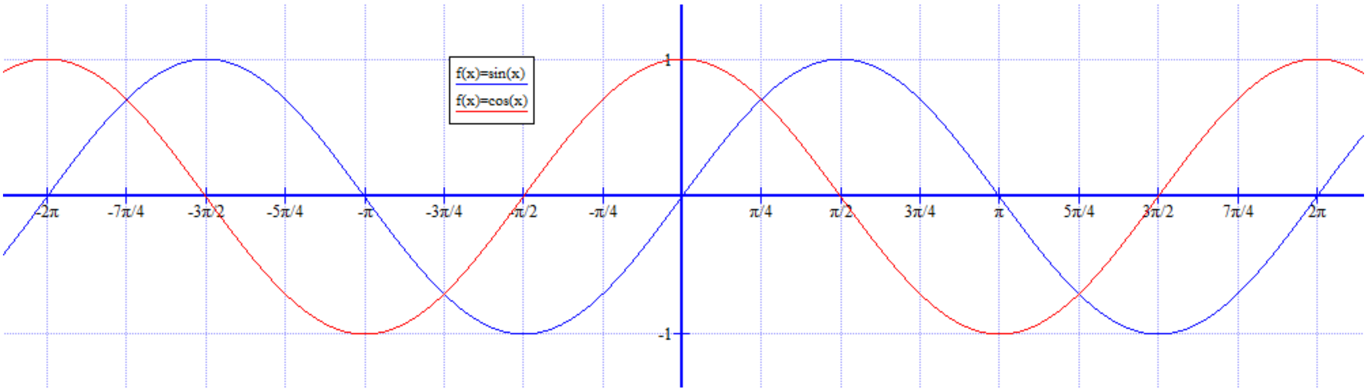
Funções trigonométricas

- *Período e Amplitude da função trigonométrica*
- *Expressão geral dos zeros de f(x)*
- *Translação e Dilatação de f(x)*
- *Expressão geral da função trigonométrica*
- *Calcular f(x) associada a um gráfico*

Morais da Silva – 2022

Generalidades – Período das funções Seno e Coseno

Comecemos por visualizar os gráficos das funções Seno e Coseno.



Os gráficos das duas funções são sinusoidais com ordenadas máxima e mínima iguais.

A sinusóide do Seno tem ordenada nula para x = 0, enquanto a do Coseno tem ordenada nula para x = $\pi/2$.

<u>Analisando a curva da função Seno</u> no intervalo de x = 0 a x = 2π, vemos que é crescente até x = $\pi/2$, onde atinge a ordenada máxima y = 1, para passar a decrescente até x = $3\pi/2$ onde atinge o valor mínimo y = -1. A partir daqui volta a ser crescente atingindo novamente a ordenada nula em x = 2π.

<u>No gráfico da função Seno</u> constatamos que o traçado, de x = -2π até x = 0, é exactamente igual ao traçado entre x = 0 e x = 2π.

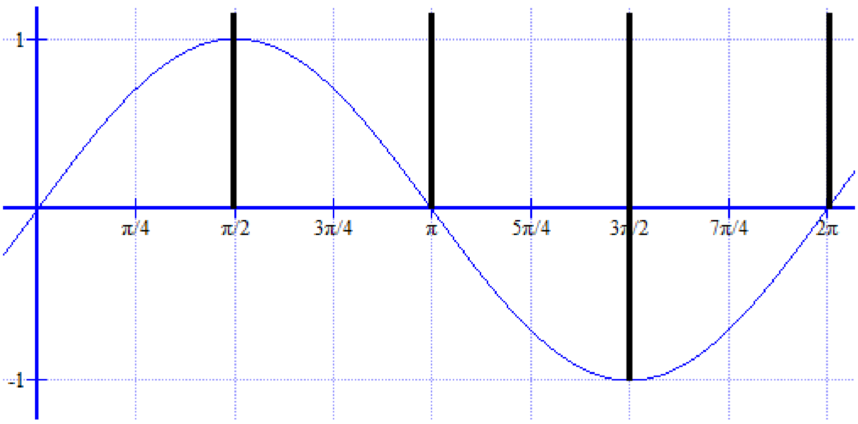
No gráfico da função Coseno constata-se andamento similar ao da função Seno (compare-se a sinusóide de x = -2π a x = 0 , com a sua réplica de x = 0 a x = 2π).

Resumindo, a intervalos de "comprimento" 2π a sinusóide da função Seno é igual às precedente e subsequente.

Esta repetição do traçado denota o que designamos por **Período da função** que <u>é igual a 2π nas funções Seno e Coseno</u>.

Troços no Período da função Seno

Analisemos a sinusóide de x = 0 até x= 2π (período de 2π).



No Período há 2 "bossas" simétricas e em cada uma delas <u>2 troços</u> sendo um ascendente (ou descendente) e outro descendente (ou ascendente).

Daqui resulta que para construir gráficos do Seno (ou Coseno) <u>devemos dividir o Período por 4</u> para conhecer as abcissas básicas para interpretar o andamento do gráfico.

Aqui chegados coloca-se a questão seguinte: Como calcular o Período das funções Seno e Coseno ?

Expressão Geral da função trigonométrica

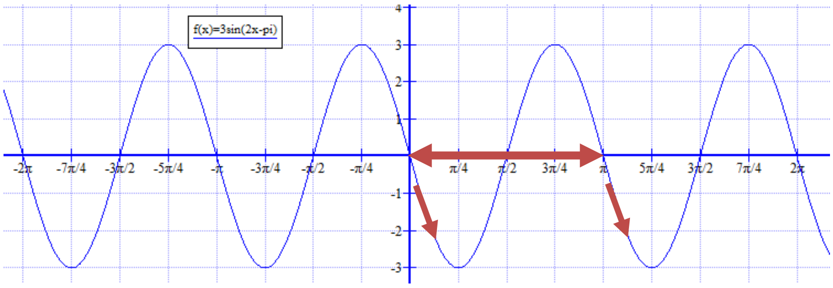
$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Função Seno} \\ y = A\,sen\left(B\,x - C\right) + D \end{array}}$$

Se nesta expressão geral variarmos o parâmetro “B” (coeficiente do ângulo “x”) expandimos ou contraímos o gráfico da função, alterando pois o Período da mesma. Daqui resulta que a expressão para calcular o Período da função Seno (tal como a do Coseno) é:

$$\left(P = \frac{2\pi}{|B|} \right)$$

$$\textit{Exemplo}: f(x) = 3sen(2x - \pi)$$

$$P = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



Pontos-chave para construir o gráfico e estudá-lo:

$$\frac{P}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi$$

$$\begin{array}{l} \textit{Calcular } f(x) = 3sen(2x - \pi) \textit{ nos pontos} - \textit{chave}: \\ f(0) = 3sen(0 - \pi) = 0 \\ f(\tfrac{\pi}{4}) = 3sen(\tfrac{2\pi}{4} - \pi) = 3sen(-\tfrac{\pi}{2}) = -3sen(\tfrac{\pi}{2}) = -3 \\ f(\tfrac{2\pi}{4}) = 3sen(\tfrac{4\pi}{4} - \pi) = 0 \\ f(\tfrac{3\pi}{4}) = 3sen(\tfrac{6\pi}{4} - \pi) = 3sen(\tfrac{\pi}{2}) = 3 \\ f(\tfrac{4\pi}{4}) = 3sen(\tfrac{8\pi}{4} - \pi) = 3sen(\pi) = 0 \end{array}$$

Este conjunto de resultados permite esboçar o gráfico da função dada e obter informação útil:

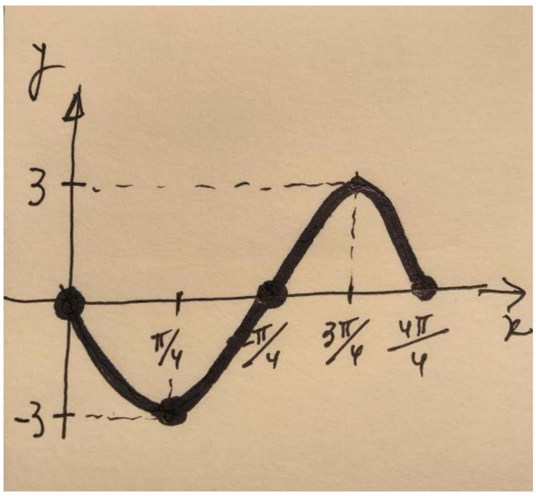
$$\textit{Máximo} = +3 \textit{ para ângulo } x = \tfrac{3\pi}{4}$$

$$\textit{Mínimo} = -3 \textit{ para ângulo } x = \tfrac{\pi}{4}$$

$$\textit{Amplitude de } f(x) = \tfrac{+3-(-3)}{2} = 3 = \text{A } \textit{da expressão geral})$$

$$\textit{Zeros}: x = 0 \textit{ e } x = \tfrac{\pi}{2}$$

$$\textit{Expressão geral dos Zeros}: x = \tfrac{\pi}{2} \pm k\pi \textit{ , k inteiro}$$



Vejam-se as expressões gerais das funções COSENO e TANGENTE iguais à já apresentada da função Seno

Função Coseno

$$y = A\cos(Bx - C) + D \qquad com\left(P = \frac{2\pi}{|B|}\right)$$

Função Tangente

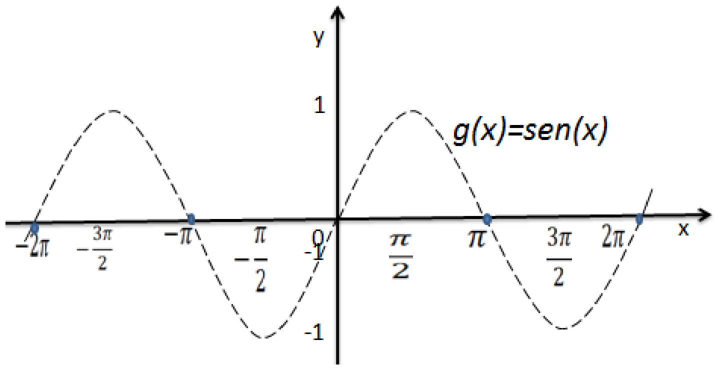
$$y = A\,tg(Bx - C) + D \qquad com\left(P = \frac{2\pi}{|B|}\right)$$

Já tendo identificado "A" como sendo a Amplitude de f(x) vejamos os parâmetros "C" e "D".

A variação do parâmetro "C", associado ao "B", provoca a <u>translação horizontal</u> do gráfico da função

A variação do parâmetro "D" provoca a <u>translação vertical</u> do gráfico da função

Vamos agora visualizar a variação destes parâmetros, partindo da função g(x) = sen(x)



Pontos-chave de g(x)

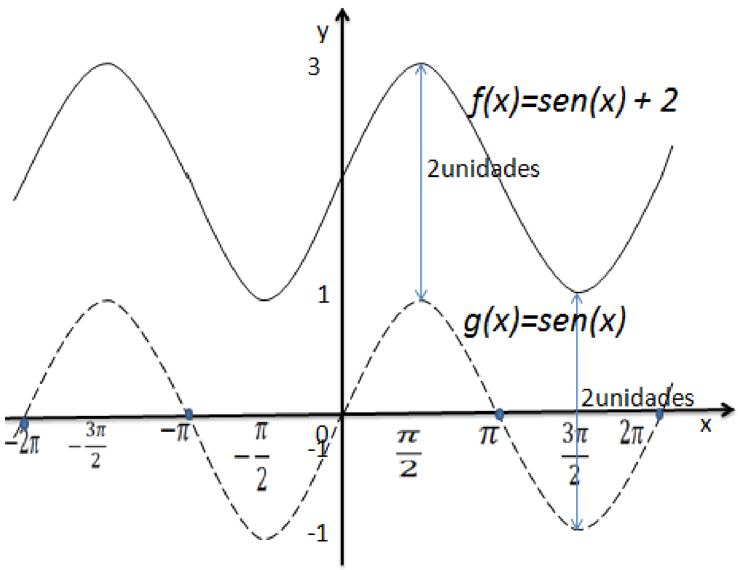
a) O domínio da função é R

b) O contradomínio é [-1,1]

c) A ordenada na origem é y=0.

d) A função) intersecta o eixo das abcissas de π em π pelo que a expressão geral dos Zeros é x = ± k π, com k ∈ Z

1. Considerando <u>D = 2</u>, ficando f(x) = sen(x)+2 , o gráfico g(x) sobe 2 unidades.



Pontos-chave de f(x)

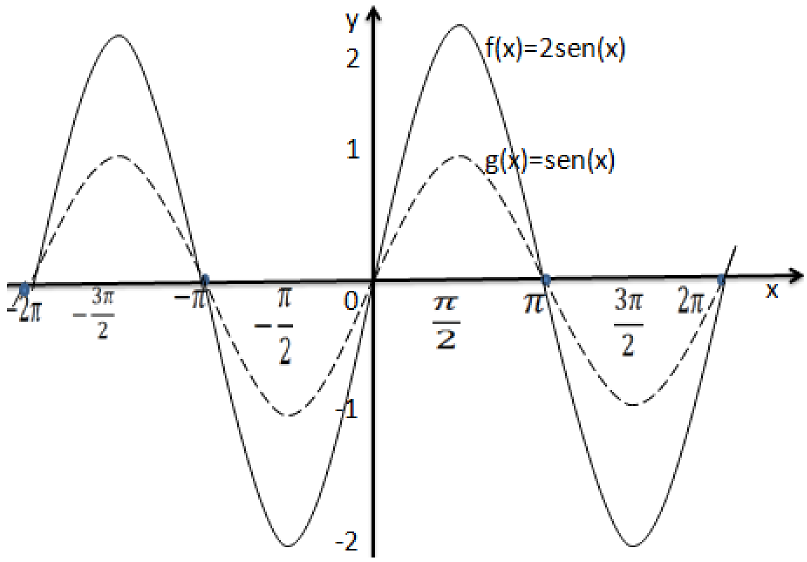
a) O domínio da função é R

b) O contradomínio é [1,3]

c) A ordenada na origem é y=2.

d) A função não intersecta o eixo das abcissas, pelo que a função não tem zeros.

2. Considerando A = 2 ficando f(x) = 2sen(x), os extremos do gráfico passam a ser +2 e -2 (amplitude duplicada)



Pontos-chave de f(x)

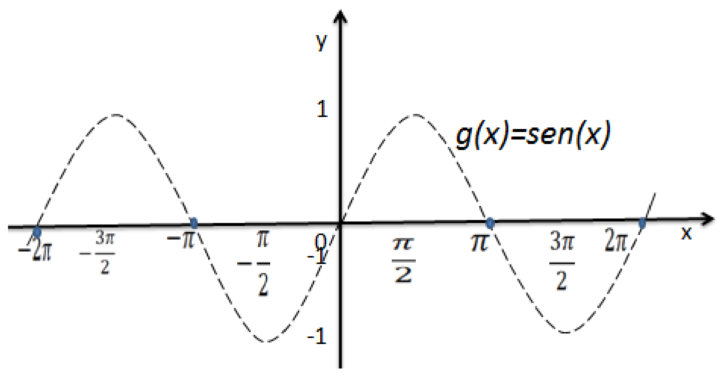
a) O domínio da função é R

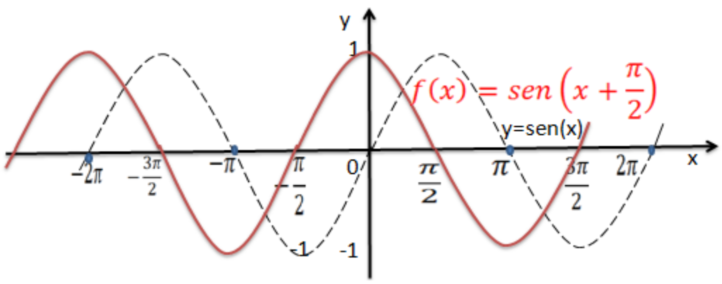
b) O contradomínio é [-2,2]

c) A ordenada na origem é y=0.

d) A função intersecta o eixo das abcissas de π em π pelo que a expressão geral dos Zeros é $x = k\pi$, com $k \in Z$

3. Considerando C = π/2 fica f(x) = 2sen(x + π/2). O gráfico desloca-se π/2 rad para a esquerda (translação horizontal).





Pontos-chave de f(x)

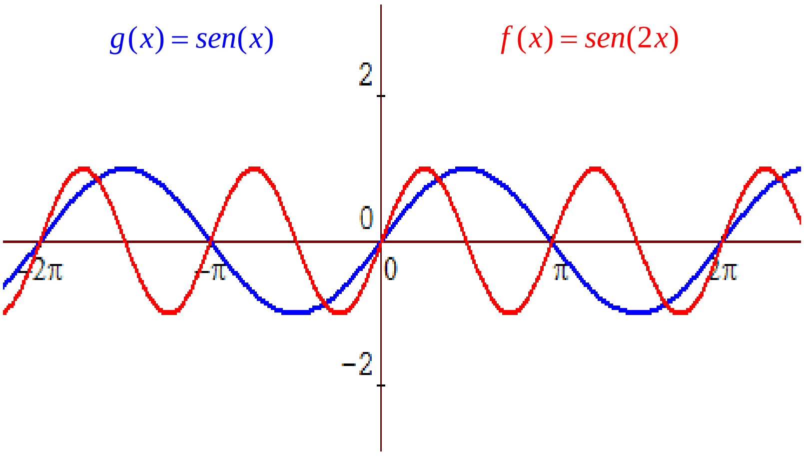
a) O domínio da função f(x) é R

b) O contradomínio é [-1,1]

c) A ordenada na origem é y=1.

d) A função intersecta o eixo das abcissas de π em π. A expressão geral dos Zeros é $x = (\pi / 2) \pm k\pi$

4. Considerando B = 2 fica f(x) = sen(2x) e o Período passa ser metade do original



Pontos-chave de f(x)

a) O domínio da função é R

b) O contradomínio é [-1,1]

c) A ordenada na origem é y = 0.

d) Período P = π