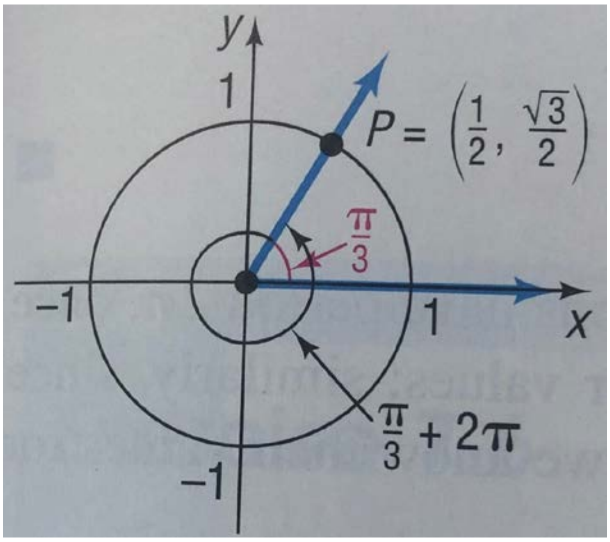
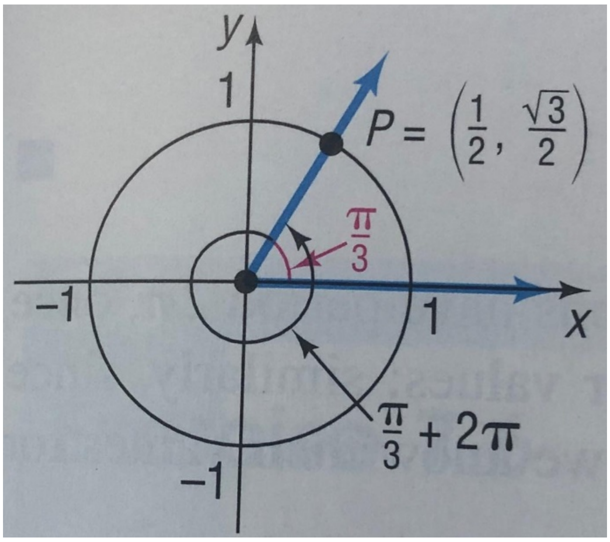
Descomplicando a Trigonometria (4)

Funções trigonométricas – Gráficos e Características



Morais da Silva – 2022

Período das Funções trigonométricas



Na figura, ao ângulo de 60º (π/3) corresponde na circunferência trigonométrica o ponto P.

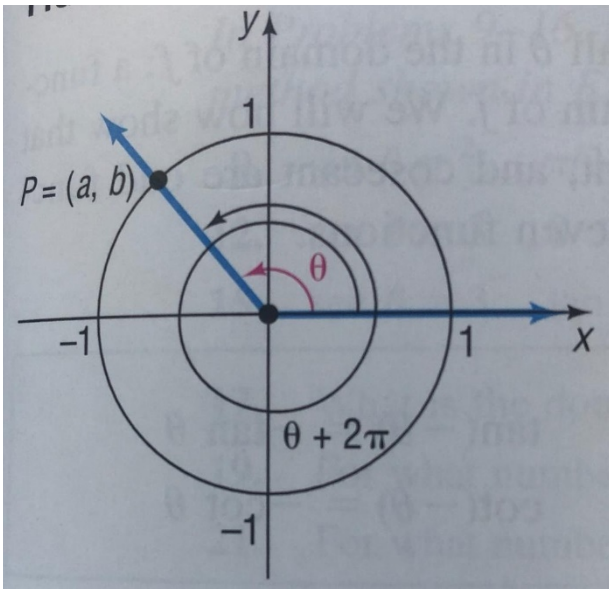
Notar que ao ângulo (π/3 + 2π) <u>corresponde o mesmo ponto P</u>

$$sen\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.........e \qquad sen\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.........e \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\frac{1}{2}$$

(notar seno = ordenada de P e coseno = abcissa de P)

Este exemplo ilustra uma situação que vamos generalizar.



Admitamos um dado ângulo θ, medido em radianos, a que corresponde na circunferência trigonométrica (raio unitário), o ponto P(a , b). Adicionando 2π ao ângulo θ o ponto correspondente na circunferência é exactamente o mesmo ponto P(a , b).

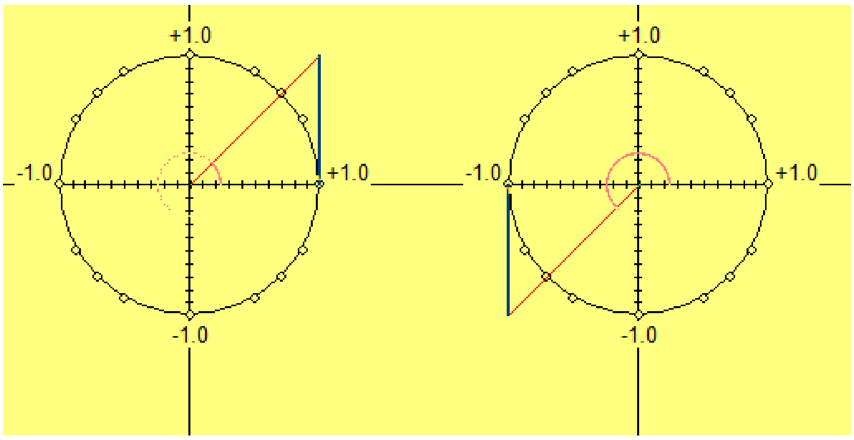
Se somarmos ou subtrairmos ao ângulo θ múltiplos inteiros de 2π os valores trigonométricos permanecem constantes.

Assim sendo, concluímos que para qualquer valor de θ,

$$\boxed{sen(\theta+2k\pi)=sen\ \theta \qquad \cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta \qquad com\ k\ inteiro}$$

<u>As funções com este comportamento são Funções Periódicas</u>. <u>**O Período das funções Seno e Coseno é igual a 2π.**</u>

Na figura seguinte temos a função Tangente (segmento azul) dos ângulos de 45º e (45+180 = 225º).



Verificamos que o Período da função tangente é de 180º ou seja π

$$\boxed{tg(\theta+k\pi)=tg\ \theta \quad com\ k\ inteiro}$$

Usando o Período no cálculo de valores exactos

$$Calcular\ o\ valor\ exacto\ de\ sen(420^o)$$

<u>A função SENO tem Período = 2π.</u> Porque o ângulo de 420º excede o Período devemos diminuí-lo de múltiplos deste para reduzi-lo ao intervalo 0 $\leqslant \theta \leqslant$ 360º.

$$sen(420^o) = sen(360^o + 60^o) = sen\,60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

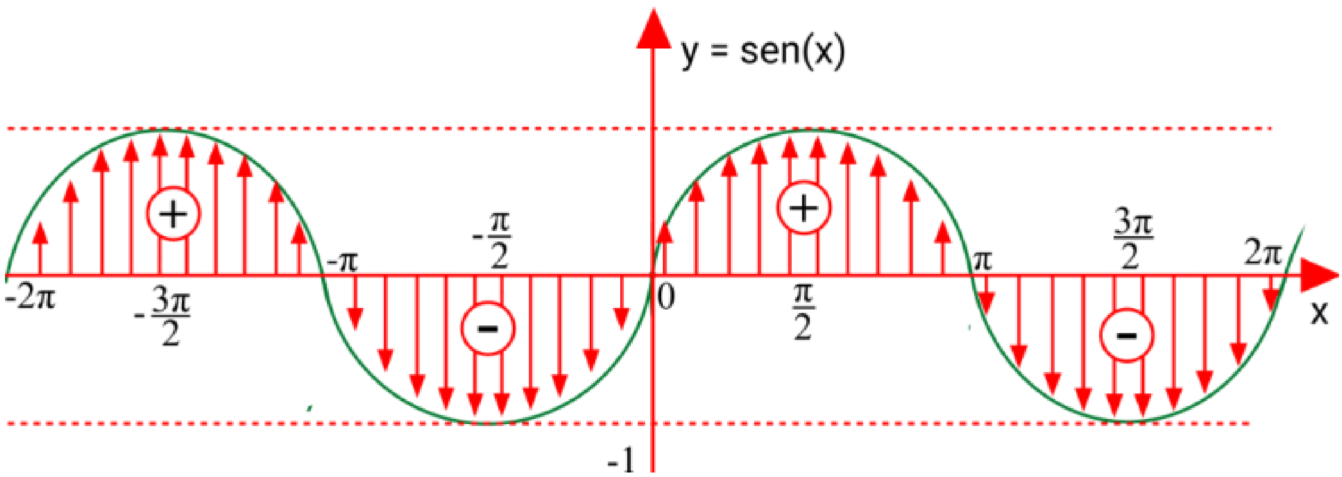
$$Calcular\ o\ valor\ exacto\ de\ tg\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

<u>A função TANGENTE tem Período π</u> e o ângulo excede-o. Precisamos de reduzi-lo ao intervalo 0 $\leqslant \theta \leqslant \pi$

$$tg\left(\frac{5\pi}{4}\right) = tg\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Gráfico da função y = sen(x)

<u>Tendo esta função o Período de 2π, só precisamos deste gráfico no intervalo [0 , 2π].</u>



Características da função SENO

<u>Domínio</u>: conjunto dos números reais

<u>Contradomínio</u>: números reais no intervalo [-1 , 1]

É uma <u>função ímpar</u> $\rightarrow$ sen(- α) = - sen(α)

<u>Período</u>: 2π

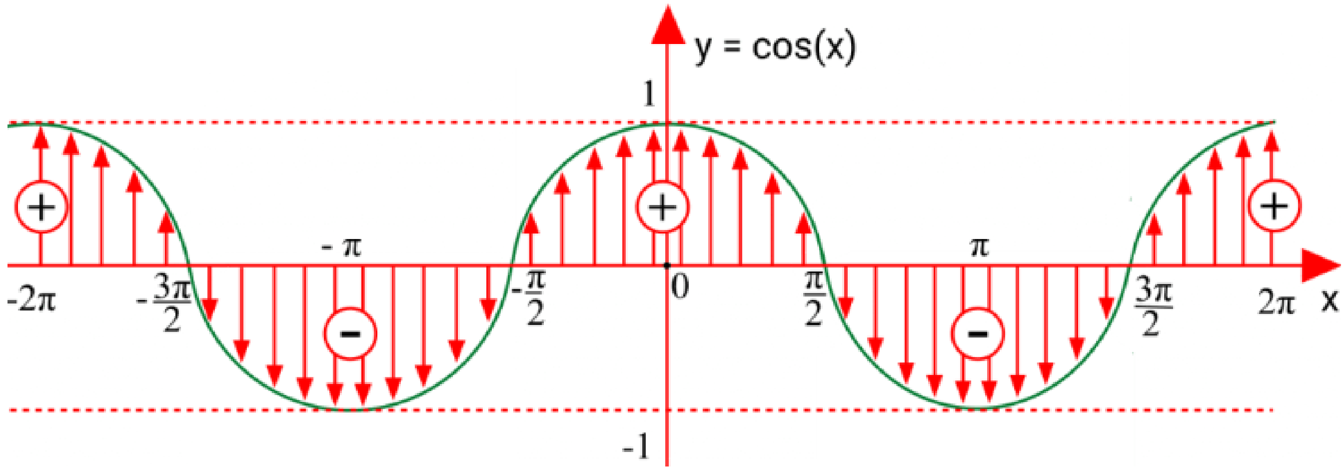
Intersecta o eixo do "x" nas abcissas… -2π, -π, 2π (0), π, 2π… ; intersecta o eixo "y" na ordenada 0

$$Valor\ Máximo = 1\ \ com\ x = -\frac{3\pi}{2} - 2k\pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k\ inteiro$$

$$Valor\ Mínimo = -1\ \ com\ x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k\ inteiro$$

Gráfico da função y = cos(x)

Tendo esta função o Período de 2π, só precisamos deste gráfico no intervalo $[0 , 2\pi]$.



Características da função COSENO

Domínio: conjunto dos números reais

Contradomínio: números reais no intervalo [-1 , 1]

É uma função par $\rightarrow \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

Período: 2π

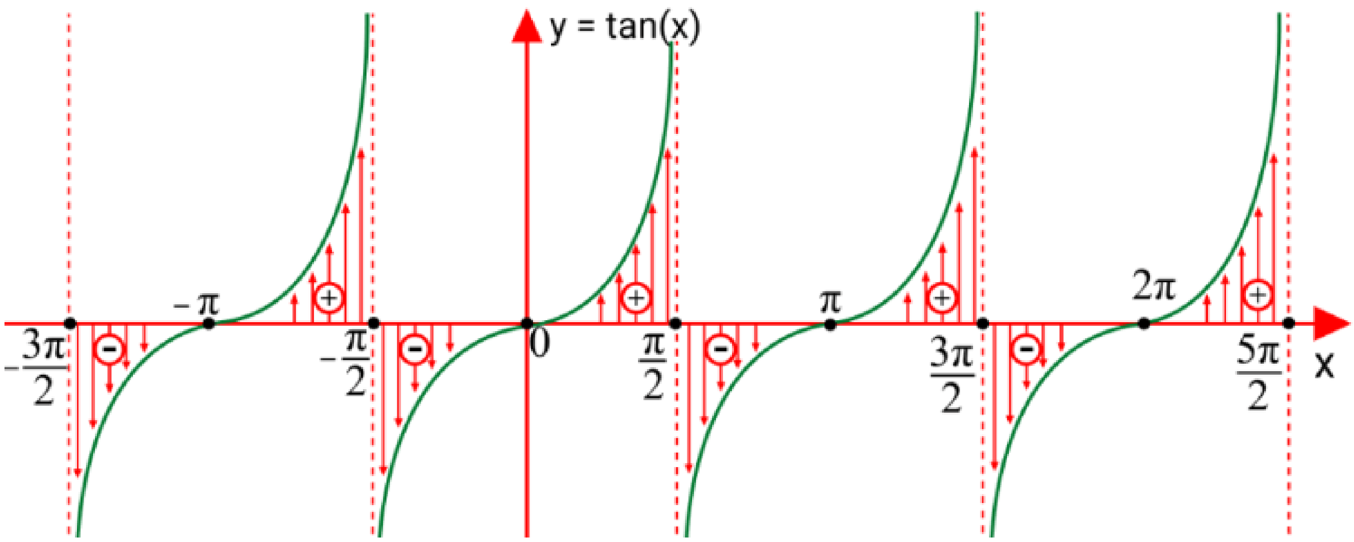
Intersecta o eixo do "x" nas abcissas… $-3\pi/2$, $-\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, … ; intersecta o eixo "y" na ordenada 1

Valor Máximo =1 com x = -2π, 0 ; 2π, 4π, 6π …

Valor mínimo = -1 com x = $-\pi$, π, 3π, 5π …

Gráfico da função y = tan(x)

Tendo esta função o Período de π, só precisamos deste gráfico no intervalo $[0 , \pi]$.



Características da função TANGENTE

Domínio: conjunto dos números reais EXCEPTO ($\pi/2 + k\pi$ com k inteiro)

Contradomínio: conjunto dos números reais

É uma função ímpar $\rightarrow$ $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

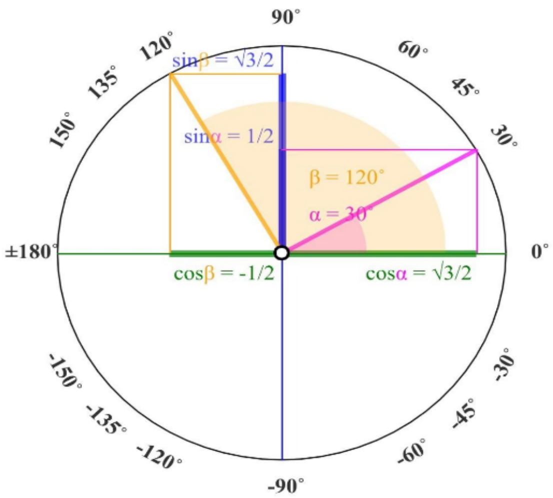
Período: π

Intersecta o eixo do "x" nas abcissas... $-\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$, π, 3 $\pi/2$... ; não intersecta o eixo "y"

Valor $\pm\infty$ nos ângulos $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ ...

Redução de ângulos ao 1º quadrante"

Ângulo do 2º quadrante (exemplo com 120º)



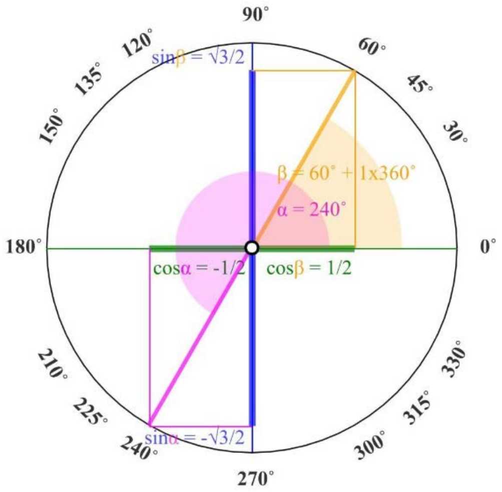
Recorrendo a expressão matemática com "pivot" = 90º

$$\begin{cases} sen(90+\alpha) = \cos(\alpha) \\ cos(90+\alpha) = -sen(\alpha) \end{cases} \begin{cases} sen(120) = sen(90+30) = \cos(30) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ cos(120) = cos(90+30) = -sen(30) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Generalizando, com "pivot" de 90º temos:

$$sen(90° \pm \alpha) = +\cos(\alpha)$$
$$\cos(90° \pm \alpha) = \mp sen(\alpha)$$

Ângulo do 3º quadrante (exemplo com 240º)

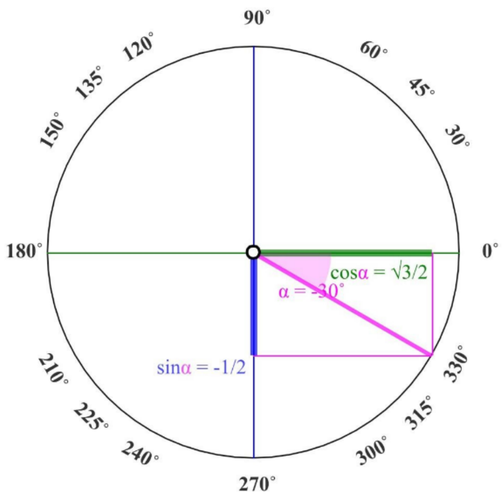


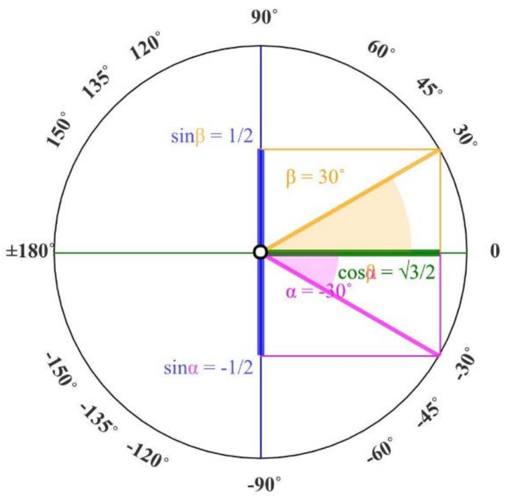
Recorrendo a expressão matemática com “pivot” = 180º

$$\begin{cases} sen(180+\alpha) = -sen(\alpha) \\ cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases} \begin{cases} sen(240) = sen(180+60) = -sen(60) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ cos(240^{o}) = cos(180+60) = -\cos(60) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Generalizando, com “pivot” de 180º temos: $\begin{cases} sen(180^\circ \pm \alpha) = \mp sen(\alpha) \\ \cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases}$

Ângulo do 4º quadrante (exemplo com 330º)





Qualquer ângulo “α” positivo do 4º quadrante é igual a um ângulo negativo. A soma de ambos, em valor absoluto, é de 360º**.** Ângulos simétricos dos 1º e 4º quadrantes têm Senos simétricos e Cosenos iguais.

$$sen(330^{o}) = sen(-30^{o}) = -sen(30^{o}) = -\frac{1}{2}$$

$$cos(330^{o}) = \cos(-30^{o}) = \cos(30^{o}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seno e Coseno da soma algébrica de 2 ângulos "α" e "β"

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) \pm sen(\beta)\cos(\alpha)$$

$$Usamos\ anteriormente\ a\ soma\ (90+\alpha).Podemos\ agora\ deduzir:$$

$$sen(90+\alpha) = sen(90)\cos(\alpha) + sen(x)\cos(90) = (1)\times\cos(\alpha) + sen(\alpha)\times(0) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp sen(\alpha)sen(\beta)$$

$$Usamos\ anteriormente\ a\ soma\ (90+\alpha).Podemos\ agora\ deduzir:$$

$$\cos(90+\alpha) = \cos(90)\cos(\alpha) - sen(90)sen(\alpha) = (0)\times\cos(\alpha) - (1)sen(\alpha) = -sen(\alpha)$$

A partir das expressões da soma de dois ângulos deduz-se, por exemplo, a soma algébrica de (180 ± α)

$$\begin{cases} sen(180+\alpha) = sen(180)\cos(\alpha) + sen(\alpha)\cos(180) = (0)\times\cos(\alpha) + sen(\alpha)\times(-1) = -sen(\alpha) \\ \cos(180+\alpha) = \cos(180)\cos(\alpha) + sen(180)\cos(\alpha) = (-1)\times\cos(\alpha) + (0)\cos(\alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen(180-\alpha) = sen(180)\cos(\alpha) - sen(\alpha)\cos(180) = (0)\times\cos(\alpha) - sen(\alpha)\times(-1) = +sen(\alpha) \\ \cos(180-\alpha) = \cos(180)\cos(\alpha) - sen(180)sen(\alpha) = (-1)\times\cos(\alpha) - (0)sen(\alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen(180 \pm \alpha) = \mp sen(\alpha) \\ \cos(180 \pm \alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases}$$

A partir das expressões da soma de dois ângulos deduz-se, por exemplo, a soma algébrica de (α - 180º)

$$\begin{cases} sen(\alpha - 180) = -sen(\alpha) \\ \cos(\alpha - 180) = -\cos(\alpha) \end{cases}$$