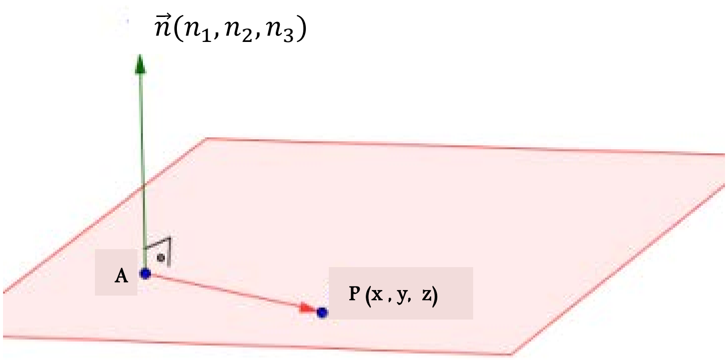
Equações de Planos no Espaço (3)

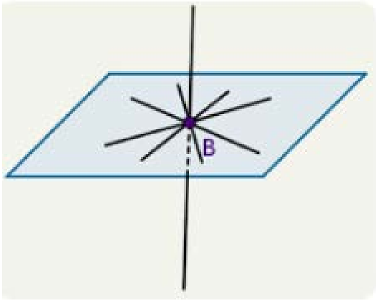
1. *Vector normal a um plano*
2. *equação cartesiana do plano*
3. *equação vectorial do plano*
4. *equações paramétricas do plano*
5. *planos paralelos*
6. *planos perpendiculares*
7. *exemplos práticos*



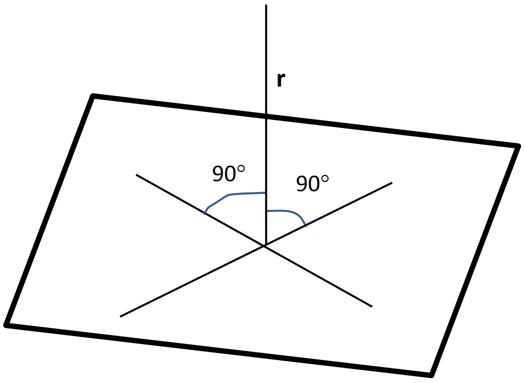
Morais da Silva – 2022

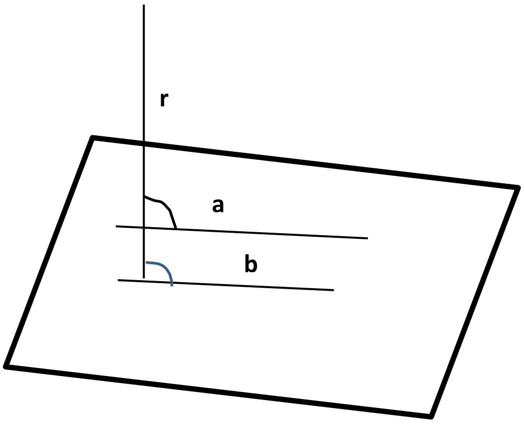
1. Perpendicularidade entre rectas e planos

Se uma recta <u>é perpendicular a um plano</u> é perpendicular a todas as rectas do plano.



Uma recta <u>só é perpendicular a um plano</u> se for perpendicular a um par de rectas concorrentes ou paralelas do plano.

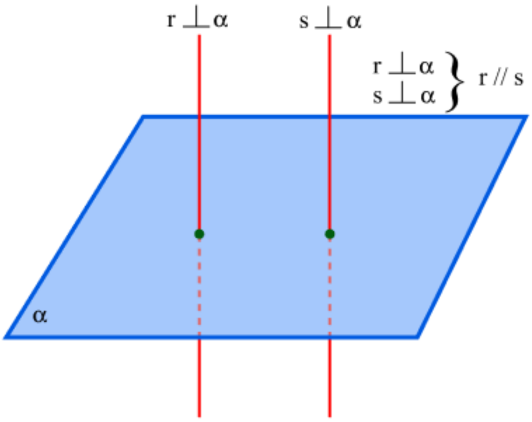


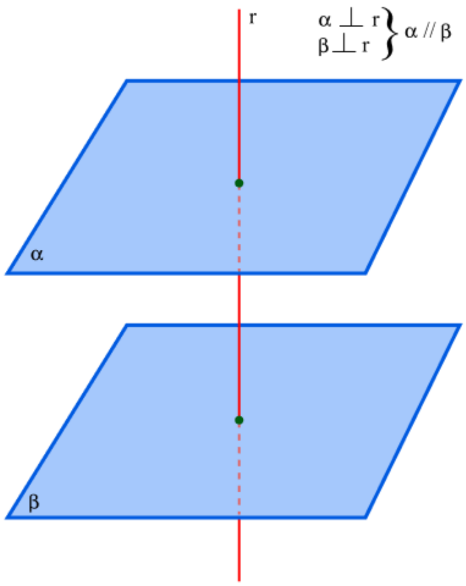


Nota: três pontos não colineares ou uma recta e um ponto exterior, pertencentes a um plano, são casos particulares pois ambos podem ser transformados num par de rectas concorrentes ou paralelas do plano

Duas ou mais rectas <u>perpendiculares ao mesmo plano</u> são paralelas entre si

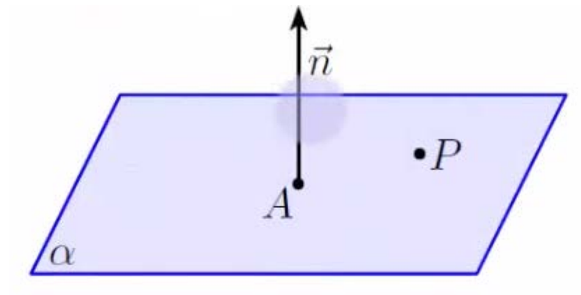
Se uma recta é perpendicular a um ou mais planos, estes são paralelos entre si.





2. Equação Cartesiana do plano

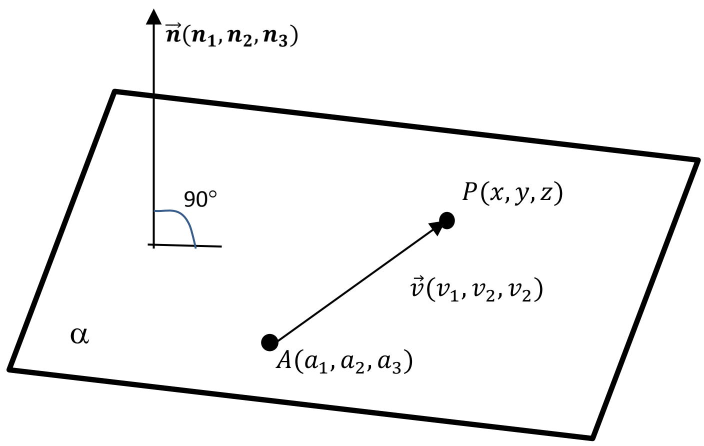
Um plano pode ser definido por um dos seus pontos e por um vector que lhe seja perpendicular



O vector $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ é NORMAL ao plano se é vector director de rectas perpendiculares ao plano.

Na figura temos:

- vector normal $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$
- ponto A pertencente ao plano
- ponto genérico do plano $P(x, y, z)$
- vector $\vec{v}(v_1, v_2, v_3) = \overrightarrow{AP}$



O vector $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ é perpendicular ao plano se e só se $\vec{n} \bullet \vec{v} = 0$ (produto interno nulo).

O vector $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ é igual a $\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (a_1, a_2, a_3) = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$.

O Produto Interno $\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP} = 0$ é $(n_1, n_2, n_3) \bullet (x - a_1, y - a_2, z - a_3) = 0$ do que resulta

$$n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0$$

e, ainda: $n_1 x + n_2 y + n_3 z - (n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3) = 0$

Temos finalmente a Equação Cartesiana do Plano:

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - d = 0$$

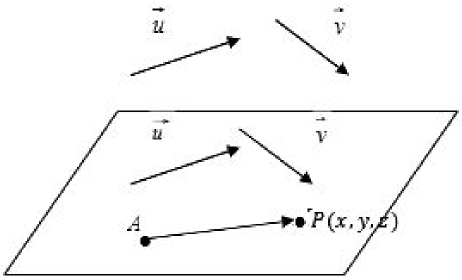
onde os coeficientes das coordenadas de qualquer ponto $P(x, y, z)$ do plano são as coordenadas de um vector normal ao plano e "d" é um somatório de produtos das coordenadas do vector director com as de um ponto "A" conhecido do plano.

Se $n_1 \neq 0$, a equação cartesiana pode escrever-se $a\left(x - \frac{-d}{a}\right) + by + cz$ definindo um plano que passa no ponto de coordenadas $\left(-\frac{d}{n_1}, 0{,}0\right)$.

Para $n_2 \neq 0$ ou $n_3 \neq 0$ teremos de igual modo passagem nos pontos $\left(0, -\frac{d}{n_2}, 0\right)$ ou $\left(0{,}0, -\frac{d}{n_3}\right)$ respectivamente

3. Equação Vectorial do plano

Consideremos os vectores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$, linearmente independentes (ou seja, não colineares) paralelos ou pertencentes ao plano da figura e o ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ no mesmo plano.



Um vector é paralelo a um plano se for vector director de uma recta do plano.

Qualquer ponto $P(x, y, z)$ do plano pode ser definido como soma do ponto A com os vectores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ devidamente modificados, ou seja:

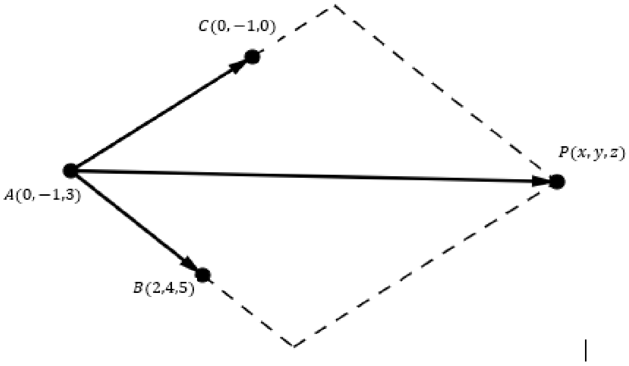
$$(x, y, z) = A + \boldsymbol{k}\vec{u} + \boldsymbol{\lambda}\vec{v}$$

Temos assim a Equação Vectorial do plano:

$$\boldsymbol{(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(u_1, u_2, u_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3)}$$

Admitamos, como exemplo, que são conhecidos os pontos A(0, -1, 3), B(2, 4, 5) e C(0, -1, 0) de um plano e pretendemos calcular a equação vectorial deste sabendo que o ponto $P(x, y, z)$ é um ponto genérico do plano.

A figura mostra que o vector $\overrightarrow{AP}$ pode obter-se somando ao ponto A os vectores $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{AC}$ corrigindo o seu comprimento com os escalares $k\ e\ \lambda$ (a tracejado estão as modificações de comprimento necessárias).



Vectores necessários:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 5, 2)\ ;\ \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, -3)$$

A Equação Vectorial do Plano é então:

$$\boldsymbol{(x, y, z) = (0, -1, 3) + k\, \overrightarrow{AB} + \lambda\, \overrightarrow{AC}}$$

$$\boldsymbol{(x, y, z) = (0, -1, 3) + k\ (2, 5, 2) + \lambda\ (0,} 0, -3)$$

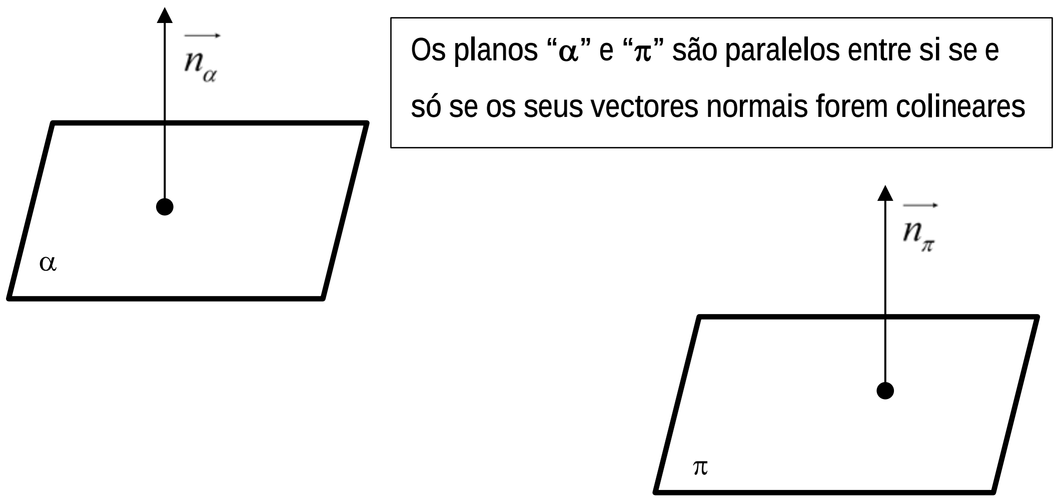
4. Equações Paramétricas do plano

Da equação vectorial $\boldsymbol{(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(u_1, u_2, u_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3)}$ deduz-se o sistema de equações paramétricas do plano:

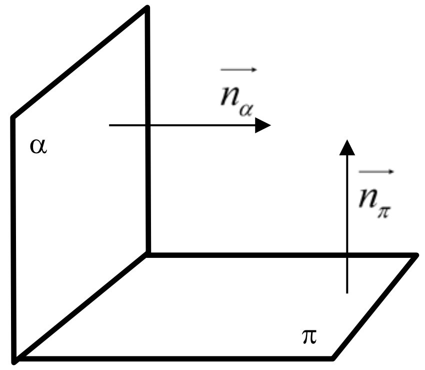
$$\begin{cases} x = a_1 + ku_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + ku_2 + \lambda v_2 \qquad k, \lambda\ inteiros \\ z = a_3 + ku_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

5. Planos Paralelos

Os planos “α” e “π” são paralelos entre si se e só se os seus vectores normais forem colineares



6. Planos Perpendiculares



Os planos “α” e “π” são perpendiculares entre si se e só se os seus vectores normais forem perpendiculares entre si (produto interno nulo)

7. Exercícios típicos

a. São dados o Vector Normal do plano $\vec{n}(2,-1,3)$ e um ponto do plano A(-3, 0 ,2) para calcular a Equação Cartesiana do Plano.

Solução

A expressão geral da Equação cartesiana é $n_1x + n_2y + n_3z - d = 0$

Nesta situação temos:

$$2x - y + 3z - \left(2(-3) + \left(-1(0)\right) + 3(2)\right) = 0$$

$$2x - y + 3z - (-6 + 0 + 6) = 0$$

$$2x - y + 3z = 0 \text{ (expressão geral)}$$

b. São dadas as coordenadas de um ponto de um plano, A(2, 2 , -1), paralelo aos vectores $\vec{u}\ (2,-3,1)\ e\ \vec{v}(-1,5,-3)$. Calcular a Equação Vectorial do Plano, o sistema de equações paramétricas e a equação geral do plano.

Solução

Os vectores dados são paralelos ao plano pelo que são vectores directores de rectas do plano. Assim sendo a Equação Vectorial do plano é a seguinte:

$$(x,y,z) = A + k\vec{u} + \lambda\vec{v} = (-3,0,2) + k(2,-3,1) + \lambda(-1,5,-3)$$

O Sistema de equações paramétricas do plano deduz-se da sua equação vectorial:

$$\begin{cases} x = a_1 + ku_1 + \lambda v_1 = 2 + 2k - \lambda \\ y = a_2 + ku_2 + \lambda v_2 = 2 - 3k + 5\lambda \qquad k, \lambda\ inteiros \\ z = a_3 + ku_3 + \lambda v_3 = -1 + k - 3\lambda \end{cases}$$

A expressão da Equação Geral é a seguinte: $n_1x + n_2y + n_3z - d = 0$, sendo necessário calcular um vector normal ao plano que podemos obter recorrendo ao Produto Interno de $\vec{n}$ (normal) com um dos vectores dados. Escolhendo o vector $\vec{u}$, temos:

Produto interno nulo: $\vec{n} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (n_1, n_2, n_3) \bullet (2,-3,1) = 0 \Leftrightarrow 2n_1 - 3n_2 + n_3 = 0$

Esta equação tem 3 variáveis pelo que a sua solução é Indeterminada (múltiplas soluções).

Para obter uma das muitas soluções possíveis e igualmente válidas atribui-se um valor arbitrário a duas das variáveis.

Considerando $n_1 = 4\ e\ n_2 = 5$ temos $2n_1 - 3n_2 + n_3 = 0 \Leftrightarrow 8 - 15 + n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = 7$

Temos agora o vector normal $\vec{n}(4, 5, 7)$ que permite calcular o parâmetro

$$d = -(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3) = -\left(4 \times 2 + 5 \times 2 + 7 \times (-1)\right) = -11$$

A equação geral é pois: $n_1x + n_2y + n_3z - d = 0 \Leftrightarrow \mathbf{4x + 5y + 7z - 11 = 0}$

c. As equações paramétricas de um plano são:

$$\begin{cases} x = -1 + 2s - t \\ y = s \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad s,t\ inteiros$$

Calcular a Equação Cartesiana do plano

Solução

A expressão geral da Equação cartesiana é $n_1x + n_2y + n_3z - d = 0$

Das equações paramétricas obtemos a Equação vectorial:

$$(x, y, z) = A + s\vec{u} + t\vec{v} = (-1,0,2) + s(2,1,0) + t(-1,0,2)$$

Temos o ponto A(-1,0,2) do plano e os vectores directores de duas rectas do plano, respectivamente $\vec{u}(2,1,0)$ e $\vec{v}(-1,0,2)$

Para a equação Cartesiana precisamos das coordenadas de um Vector Normal que obtemos calculando os produtos internos:

$$\begin{cases} \vec{n} \bullet (2.1.0) = 0 \\ \vec{n} \bullet (-1,0,2) = 0 \end{cases} \begin{cases} (n_1, n_2, n_3) \bullet (2.1.0) = 0 \\ (n_1, n_2, n_3) \bullet (-1,0,2) = 0 \end{cases} \begin{cases} 2n_1 + n_2 = 0 \\ -n_1 + 2n_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema de equações é <u>Indeterminado de ordem 1</u> porque tem 3 variáveis e apenas 2 equações. Para fixar uma das infinitas soluções é necessário atribuir valor a uma das variáveis e calcular, em função dela, o valor das outras duas.

$$Considerando\ n_1 = 1\ temos: \begin{cases} n_2 = -2 \\ n_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad resultando\ \vec{n}\left(1, -2, \frac{1}{2}\right)$$

A expressão geral da Equação cartesiana é então $x - 2y + \frac{1}{2}z - d = 0$

Temos $d = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 = \left(1, -2, \frac{1}{2}\right).(-1,0,2) = -1 + 0 + 1 = 0$

A Equação Cartesiana do plano é $x - 2y + \frac{1}{2}z = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + z = 0$

d. Considerar a recta e o plano seguintes:

$$r: (x, y, z) = (2,1,-1) + k(1,1,1)\ ; k\ inteiro$$
$$\alpha: x + y + z = 4$$

Justificar que a recta intersecta o plano e calcular as coordenadas do ponto de intersecção.

Solução

Na Equação Vectorial da recta temos um vector director $\vec{u}(1,1,1)$ e na Equação Cartesiana do plano temos o vector normal $\vec{n}(1,1,1)$. <u>Os 2 vectores coincidem pelo que a recta intersecta o plano</u>.

O ponto de intersecção da recta com o plano satisfaz as equações de ambos.

As coordenadas de qualquer ponto da recta são:

$$x = 2 + k;\ \ y = 1 + k;\ \ z = -1 + k$$

Substituindo na equação do plano temos: $2 + k + 1 + k + (-1) + k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

As coordenadas do Ponto de Intersecção são $x = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3};\quad y = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3};\quad z = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$