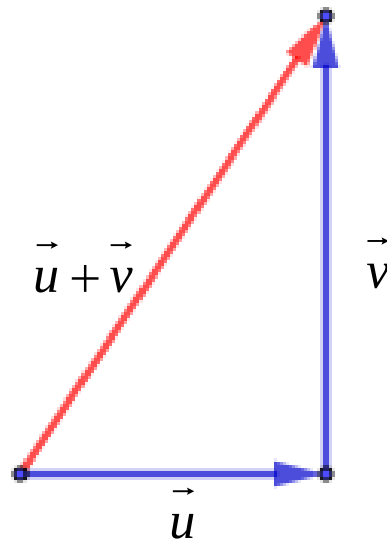


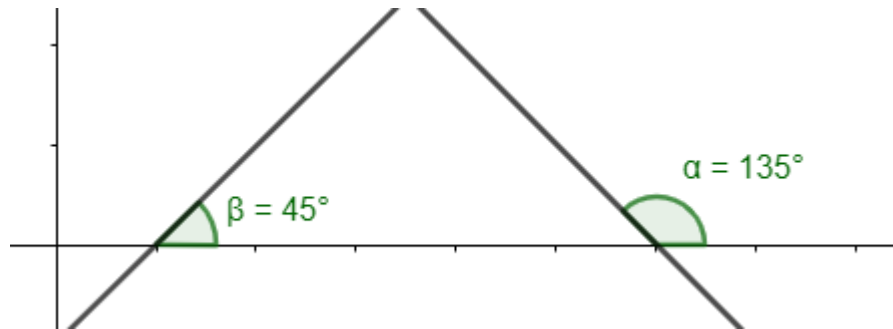
Rectas e Vectores no Plano e no Espaço (1)

1. *inclinação e declive da recta*
2. *perpendicularidade entre rectas complanares*
3. *produto interno de dois vectores*
4. *propriedades do produto interno*
5. *perpendicularidade entre dois vectores*
6. *ângulo entre dois vectores (2D)*
7. *ângulo entre rectas complanares*
8. *ângulo entre vectores no espaço*
9. *o produto interno e a projecção de um vector sobre outro*
10. *exercícios resolvidos*

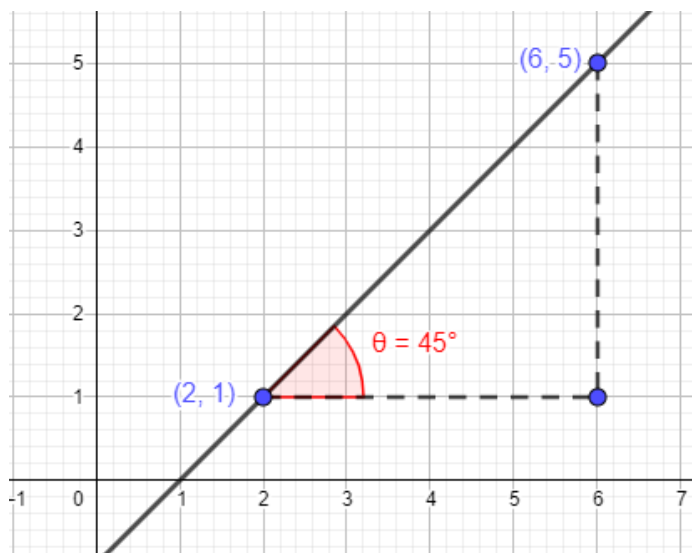


1. Inclinação e Declive da Recta

Inclinação da recta, sobre o eixo das abcissas: MENOR ÂNGULO que a recta faz com o semieixo positivo das abcissas (varia portanto entre 0° e 180°).



Declive da recta: valor da tangente trigonométrica do ângulo de inclinação da recta



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{6-2} = \frac{4}{4} = 1 = \tan(45^\circ)$$

Exemplo: calcular a equação reduzida da recta que passa em $P(-3,2)$ e tem inclinação igual a $\frac{\pi}{6}$

Solução:

- equação reduzida da recta : $y = mx + b$

- declive “m” da recta é $m = \tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- ficamos com $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + b$. Recorrendo às coordenadas do ponto P para obter a ordenada na origem “b” :

$$2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-3) + b \Leftrightarrow b = 2 + \sqrt{3}$$

- equação reduzida da recta: $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 + \sqrt{3}$

2. Condição de perpendicularidade de duas rectas coplanares

- declive da recta $[AB] = \frac{5-1}{6-2} = 1$

- declive da recta $[PQ] = \frac{5-1}{2-6} = -1$

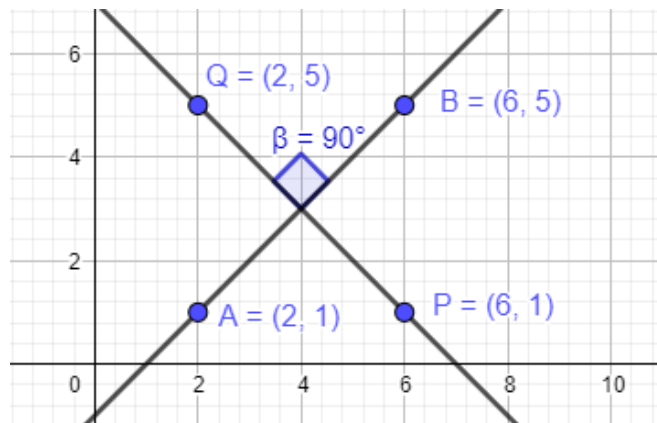
- produto dos declives = -1

Conclusão

As rectas coplanares "r" e "s" são perpendiculares entre si se o produto dos seus declives for igual a "-1"

$$m_r m_s = -1$$

Nota: do antecedente sabemos que "r" é paralela a "s" se $m_r = m_s$ (declives iguais)



3. Produto Interno de dois Vectores a partir das coordenadas

O Produto Interno $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é um escalar (número real).

No plano, sendo $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ então: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

No espaço, sendo $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ então: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

4. Propriedades do Produto Interno (plano ou espaço)

Comutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Associativa mista: $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Quadrado Escalar: $(\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Quadrado da soma de vectores: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$

Quadrado da diferença de vectores: $(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$

Exemplo: Sendo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ e $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$:

a) Calcular $\vec{a} \cdot 4\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (4\vec{b}) &= (4\vec{b}) \cdot \vec{a} \quad (\text{comutativa}) \\ &= 4(\vec{b} \cdot \vec{a}) \quad (\text{associativa mista}) \\ &= 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{comutativa}) \\ &= 4(10) = 40\end{aligned}$$

b) Calcular $(\vec{c} + \vec{a}) \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned}(\vec{c} + \vec{a}) \cdot \vec{b} &= (\vec{c} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{distributiva}) \\ &= (\vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{comutativa}) \\ &= 3 + 10 = 13\end{aligned}$$

c) Calcular $(-2\vec{a}) \cdot (-\vec{b})$

$$\begin{aligned} (-2\vec{a}) \cdot (-\vec{b}) &= -2[\vec{a} \cdot (-\vec{b})] \quad (\text{associativa mista}) \\ &= -2(-\vec{b} \cdot \vec{a}) \quad (\text{comutativa}) \\ &= -2(-1)(\vec{b} \cdot \vec{a}) \\ &= 2(\vec{b} \cdot \vec{a}) \quad \text{associativa do produto de números reais} \\ &= 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{comutativa} \quad = 20 \end{aligned}$$

d) Sendo $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 25$ e $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 9$ calcular $(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = 25 \\ (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = 9 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = 25 \\ -(\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{b})^2 = -9 \end{cases} \\ \hline \text{Soma} & \quad 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 16 \Leftrightarrow 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 16 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \end{aligned}$$

e) Sendo $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ e $\vec{w} \cdot \vec{v} = 7$, calcular $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot (-3\vec{v})$

$$(\vec{u} + \vec{w}) \cdot (-3\vec{v}) = \vec{u} \cdot (-3\vec{v}) + \vec{w} \cdot (-3\vec{v}) = -3(\vec{u} \cdot \vec{v}) + -3(\vec{w} \cdot \vec{v}) = -15 - 21 = -36$$

f) Sendo $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ e $\vec{w} \cdot \vec{v} = 7$, calcular $2\vec{v} \cdot (\vec{w} - \vec{u})$

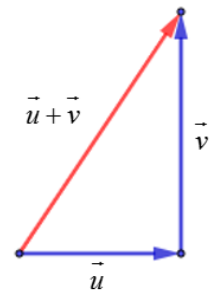
$$(2\vec{v}) \cdot (\vec{w} - \vec{u}) = (2\vec{v}) \cdot \vec{w} - (2\vec{v}) \cdot \vec{u} = 2(\vec{v} \cdot \vec{w}) - 2(\vec{v} \cdot \vec{u}) = 2(\vec{w} \cdot \vec{v}) - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 14 - 10 = 4$$

5. Condição de perpendicularidade de dois vectores

Recorrendo ao teorema de Carnot aplicado no triângulo rectângulo da figura:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \cos(\widehat{\vec{u} \vec{v}}) = \\ \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \cos(90^\circ) &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 \\ \cancel{u_1^2} + 2u_1v_1 + \cancel{v_1^2} + \cancel{u_2^2} + 2u_2v_2 + \cancel{v_2^2} &= \cancel{u_1^2} + \cancel{u_2^2} + \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} \\ 2u_1v_1 + 2u_2v_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0 \quad (\text{vectores perpendiculares entre si})$$



Se dois vectores são perpendiculares entre si o seu Produto Interno é NULO (no plano ou no espaço)

Importante::

Consideremos o vector $\vec{u}(a,b,c)$ e os vectores :

$$x(0,c,-b); \quad y(c,0,-a); \quad z(b,-a,0)$$

Estes vectores são perpendiculares ao vector $\vec{u}$ porque:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = (a,b,c) \cdot (0,c,-b) \Leftrightarrow a \times 0 + b \times c + c \times (-b) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{y} = (a,b,c) \cdot (c,0,-a) \Leftrightarrow a \times c + b \times 0 + c \times (-a) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{z} = (a,b,c) \cdot (b,-a,0) \Leftrightarrow a \times b + b \times (-a) + c \times 0 = 0$$

Os vectores, no espaço, “x”, “y” e “z” resultam do vector “u”, anulando neste uma das suas coordenadas e trocando a posição das outras duas e o sinal de uma destas

Exercícios

- a. Escreva as coordenadas de um vector perpendicular a cada um dos vectores seguintes:

$$(1, 2) \quad (1, 2, 3) \quad (1, 0, -2)$$

Solução:

Vectores com 2 coordenadas: para obter um vector perpendicular, troca-se a ordem das coordenadas e o sinal de uma delas.

Para o vector $(1, 2)$ temos 2 hipóteses: $(-2, 1)$ ou $(2, -1)$

Vectores com 3 coordenadas: para obter um vector perpendicular, anula-se uma das coordenadas; com as duas restantes usa-se o procedimento indicado para o vector de 2 coordenadas.

Para o vector $(1, 2, 3)$ temos 3 hipóteses: $(0, -3, 2)$; $(0, 3, -2)$; $(3, 0, -1)$; $(-3, 0, 1)$; $(2, -1, 0)$; $(-2, 1, 0)$

Para o vector $(1, 0, -2)$, mantemos a coordena nula e temos $(2, 0, 1)$ e $(-2, 0, -1)$

- b. Considere o vector $\vec{u}(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$. Qual dos vectores seguintes é colinear com este?

$$(A) (2\sqrt{3} - 2) \quad (B) (-3, \sqrt{6}) \quad (C) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right) \quad (D) (\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

Solução:

Vectores colineares com o vector $\vec{u}$ satisfazem a condição:

$$\vec{x} = k\vec{u} = k(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$$

$$\text{Teste de (A) com } k = 2: \quad \vec{x} = 2(\vec{u}) = (2\sqrt{3}, -2\sqrt{2}) \quad \text{falso}$$

$$\text{Teste de (B) com } k = -\sqrt{3}: \quad \vec{x} = -\sqrt{3}(\vec{u}) = -\sqrt{3}(\sqrt{3}, -\sqrt{2}) = (-3, \sqrt{6}) \quad \text{verdadeiro}$$

- c. Uma recta tem a inclinação de 60° . O vector director pode ter coordenadas

$$(A) (2, 1) \quad (B) (-1, -\sqrt{3}) \quad (C) (\sqrt{3}, 1) \quad (D) (2, \sqrt{3})$$

Solução:

A recta dada tem declive $\sqrt{3}$ igual à tangente de 60° . Testando as propostas temos:

(A) esta recta tem declive $m = \frac{1}{2} \neq \sqrt{3}$. A proposta é Falsa

(B) esta recta tem declive $m = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ A proposta é Verdadeira

- d. Considerando os pontos A(-2,1) e B(2,4), calcular vectores perpendiculares ao vector $\overrightarrow{AB}$ com a mesma Norma.

Solução:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 4) - (-2, 1) = (4, 3) \text{ com } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Vectores perpendiculares com igual Norma:

- trocamos as coordenadas de $\overrightarrow{AB}(4, 3)$ e o sinal de uma delas e temos:

$$\vec{u}(-3, 4) \text{ ou } \vec{v}(3, -4); \text{ ambos com a mesma Norma } \|\vec{u}\|$$

Teste da perpendicularidade de $\vec{u}$ com o vector $\overrightarrow{AB}$:

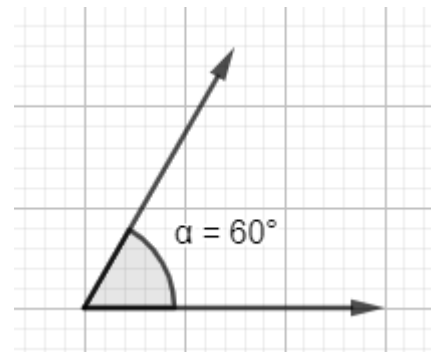
- recta suporte de $\overrightarrow{AB}(4,3)$: declive $m_{AB} = \frac{3}{4}$;
- recta suporte de $\vec{u}(-3,4)$: $m_u = -\frac{4}{3}$
- produto dos declives $= \frac{3}{4} \times \frac{-4}{3} = -1$; *confirmada a perpendicularidade*

6. Ângulo entre dois Vectors (no espaço 2D)

O ângulo entre dois vectors pertence ao intervalo $[0, 180^\circ]$ (não confundir com ângulo de 2 rectas...)

Dados dois vectors $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano (2D) ou do espaço (3D) o Produto Escalar de ambos é igual ao produto das suas Normas pelo coseno do ângulo por eles formado:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$



O ângulo entre os dois vectors é pois:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

7. Ângulo entre duas rectas (no espaço 2D)

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vectors directores de duas rectas, o ângulo " α " entre elas é:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

O ângulo entre duas rectas pertence ao intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$, onde o coseno é positivo razão porque se considera o valor absoluto do produto interno .

Notar que este ângulo pode ou não coincidir com o ângulo entre os seus vectors directores.

8. Ângulo entre Vectors (no espaço 3D)

No espaço tendo os vectors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, o ângulo entre os dois vectors obtém-se calculando:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

O ângulo entre dois vectores não é orientado dado que...

O ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é igual ao ângulo de $\vec{v}$ com $\vec{u} = \alpha$

– se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, $\cos \alpha > 0$: ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é agudo

– se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\cos \alpha = 0$: ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é recto

– se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, $\cos \alpha < 0$: ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é obtuso

Exercícios resolvidos

- a. Calcular os valores de “x” para que seja agudo o ângulo de $\vec{u}((x-1, -3, 2))$ com $\vec{v}(x+1, 3, 3)$

Solução:

Ângulo agudo (1º Q) implica $\cos \alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \cos \alpha > 0 &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1) + (-3)(3) + (2)(3)}{\sqrt{(x-1)^2 + (-3)^2 + (2)^2} \sqrt{(x+1)^2 + (3)^2 + (3)^2}} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1) - 9 + 6}{\sqrt{(x-1)^2 + (-3)^2 + (2)^2} \sqrt{(x+1)^2 + (3)^2 + (3)^2}} > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x < -\sqrt{4} \vee x > \sqrt{4} \\ &x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

- b. Determinar o ângulo formado pelas rectas AB, com A(2, 0, -1) e B(-1, 1, -1) e $r(x, y, z) = (1, -1, 0) + k(2, 1, \sqrt{5})$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1 - 2, 1 - 0, -1 - (-1)) = (-3, 1, 0)$$

O vector director da recta "r" é $\vec{r} = (2, 1, \sqrt{5})$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r}|}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\vec{r}\|} = \frac{|-6 + 1 + 0|}{\sqrt{10} \sqrt{10}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) &= 60^\circ \end{aligned}$$

- c. Calcular o ângulo BAC e provar que o ângulo CMA é recto sendo M o ponto médio de [AB]

Precisamos de calcular os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 2, 0) ; \overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 0, 3)$$

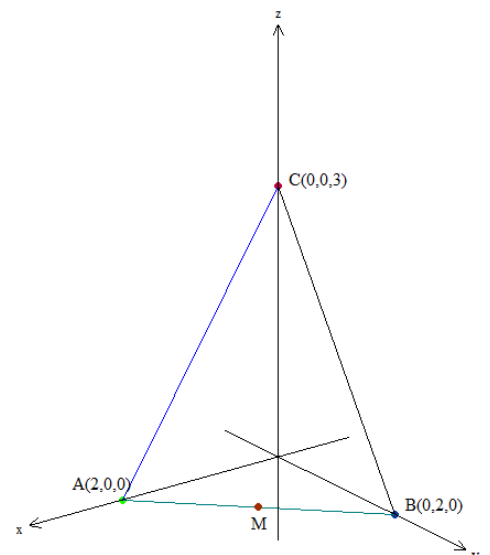
$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{|4 + 0 + 0|}{\sqrt{8} \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{104}} ; \alpha = 67^\circ$$

Se $\angle MAC = 90^\circ$ então o produto interno $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ é nulo

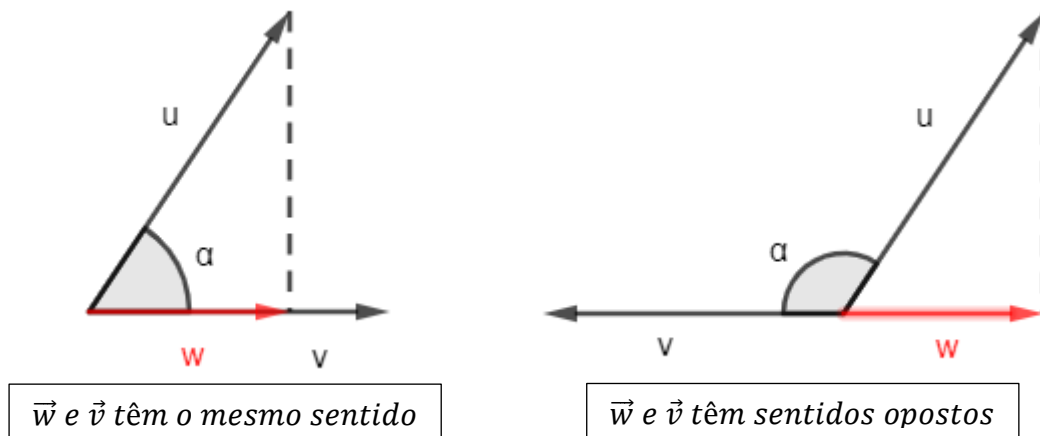
Coordenadas do ponto M: (1, 1, 0)

$$\overrightarrow{MA} = A - M = (1, -1, 0) ; \overrightarrow{MC} = C - M = (-1, -1, 3)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = -1 + 1 + 0 = 0 \text{ (produto interno nulo)}$$



9. Cálculo do Produto Escalar com projecção de um vector sobre o outro



O vector $\vec{w}$ é a projecção do vector $\vec{u}$ no vector $\vec{v}$

$$\|\vec{w}\| = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} \quad (\text{ler projecção de } \vec{u} \text{ em } \vec{v}) \quad \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\vec{u}\| \cos(\alpha)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$

Independentemente do ângulo " α " ser agudo ou obtuso verifica-se que $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{w}$

O Produto Escalar de dois vectores é igual ao Produto Escalar de um deles pela projecção vectorial do outro sobre ele.

Exercícios resolvidos

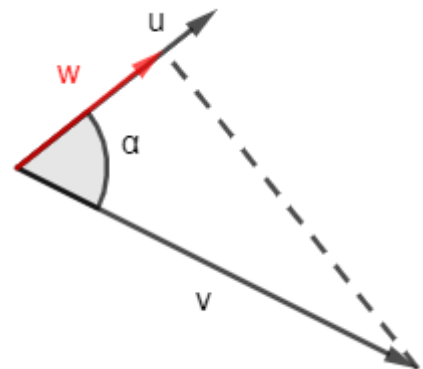
1. $\|\vec{v}\| = 10$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\|\vec{v}\| = 2 \|\vec{u}\|$; Calcular $\|\vec{u}\| \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$

Solução

$$\|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{2} = 5$$

$$\|\vec{w}\| = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \|\vec{v}\| \cos \frac{\pi}{3} = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$\|\vec{u}\| \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\| = 5 \times 5 = 25$$



2. Considere a recta recta AB com A(0,2) e B(4,0)

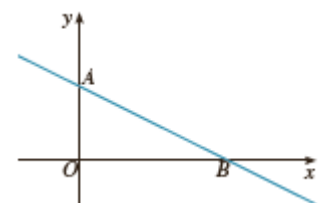
a. Calcule a equação reduzida da recta AB.

Solução

- vector director da recta AB é $(B - A) = (4, 0) - (0, 2) = (4, -2)$

- declive do vector $= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$; ordenada na origem = ordenada de A = 2

- equação reduzida da recta: $y = -\frac{1}{2}x + 2$



3. Determine a inclinação ($\pm 0.1^\circ$) das rectas seguintes:

a) $(x, y) = (2, -3) + k(-4, 4), k \in \mathbb{R}$

b) $x + \sqrt{3}y = 4$

Solução

Nota: a inclinação de uma recta é um ângulo do intervalo $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

a) vector director $\vec{v}(-4, 4)$ com declive $m = \frac{-4}{4} = -1$; $\arctan(-1) = 135^\circ$; inclinação = 135°

b) $x + \sqrt{3}y = 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{3}$; declive = $\tan(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 150^\circ$

4. Na figura está representado um paralelogramo, em que $AD = 3$ e $AB = 5$.

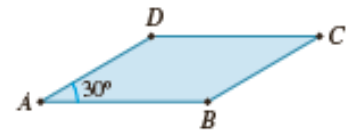
Determine:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

d) $\overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$



Solução

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AD}\| \cos(30^\circ) = 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AD}\| \cos(30^\circ) = 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

c) $\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 5 \times 2 \times 5 \times \cos(0^\circ) = 50 \times 1 = 50$

d) $\overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 \times \cos(180^\circ) = -9$

5. Considere os vectores $\vec{u}(7, -2)$ e $\vec{v}(m, 6)$ sendo “m” um número real. Calcular o valor de m, de modo que:

a) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares entre si

b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares.

c) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

Solução

a) condição de perpendicularidade de vectores: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\Leftrightarrow (7, -2) \cdot (m, 6) = 0 \Leftrightarrow 7m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{12}{7}$$

b) $\vec{u} = k \vec{v} \Leftrightarrow (7, -2) = k(m, 6) \begin{cases} 7 = km \\ -2 = 6k \end{cases} \begin{cases} m = -\frac{21}{3} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases}$

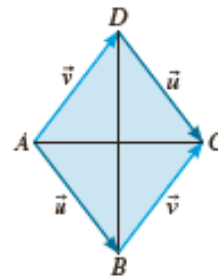
c) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{m^2 + 6^2} \Leftrightarrow 49 + 4 = \sqrt{m^2 + 36} \Leftrightarrow m^2 + 36 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{17}$

6. Provar que as diagonais do losango são perpendiculares entre si

Solução

$$\overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{u} ; \overrightarrow{DB} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (-\vec{v}) = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) + \vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0\end{aligned}$$



O produto escalar das diagonais $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$ é nulo pelo que estas diagonais são perpendiculares entre si.

7. Equação da circunferência de centro O: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Calcular a equação reduzida da recta tangente no ponto P(5, -1).

Solução

A recta tangente em P é perpendicular ao raio [CP].

Considerando um ponto genérico Q(x, y) da recta, definimos o produto escalar dos vectores $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{PQ}$ que é nulo porque os vectores são perpendiculares entre si.

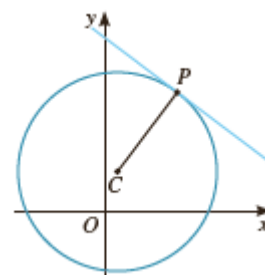
$$\overrightarrow{CP} = P - C = (5, -1) - (1, 2) = (4, -3)$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, y) - (5, -1) = (x - 5, y + 1)$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{PQ} = (4, -3) \cdot (x - 5, y + 1) = 4x - 20 - 3y - 3 = 4x - 3y - 23$$

Igualamos agora a zero o produto escalar calculado para obter a equação reduzida da recta tangente:

$$4x - 3y - 23 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{23}{3}$$



8. Considere os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de coordenadas (2, -3) e (1, 1), respectivamente.

Classifique o ângulo dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução

Sabemos que $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ tem sinal que depende apenas do sinal do produto interno dos dois vectores

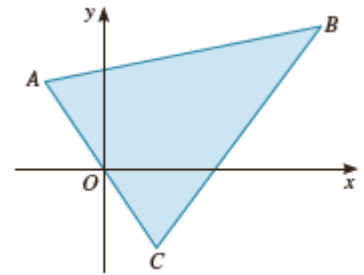
já que o produto das normas é positivo.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 = -1 \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ é obtuso}$$

9. Na figura o ponto O é ponto médio do lado AC.

Tendo $\overrightarrow{AB}(10,2)$ e $\overrightarrow{BC}(-6,-8)$ calcular:

- As coordenadas dos pontos A e C
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- amplitude do ângulo ABC ($\pm 0.1^\circ$)



Solução

a. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (10,2) + (-6,-8) = (4,-6)$

Sendo o ponto médio as coordenadas do vector $\overrightarrow{AO}$ são (2, -3).

Temos pois A(-2, 3) e C(2, -3)

b. $\overrightarrow{AC} = C - A \Leftrightarrow (2,-3) - (-2,3) = (4,-6)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (10,2) \cdot (4,-6) = 10 \times 4 + 2 \times (-6) = 28$

c. $\cos \hat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(-\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(-10,-2) \cdot (-6,-8)}{=\sqrt{104} \sqrt{100}} = \frac{76}{\sqrt{10400}} \Rightarrow \arccos\left(\frac{76}{\sqrt{10400}}\right) = 41.8^\circ$

10. Considere os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = 120^\circ$ e calcule:

- $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$
- Calcular "λ" para o qual os vectores $(\vec{u} - \lambda\vec{v})$ e $\vec{v}$ são perpendiculares

Solução

a. $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v} = -2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(120^\circ) = -2(4)(3)\left(-\frac{1}{2}\right) = 12$

b. $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{u}) - (3\vec{v} \cdot \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 - 3\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(120^\circ) = 16 - 36\left(-\frac{1}{2}\right) = 34$

c. $(\vec{u} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v}) - (\lambda\vec{v} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(120^\circ) - \lambda\|\vec{v}\| \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow -6 - 9\lambda = 0$

$$\lambda = -\frac{2}{3}$$

KEY POINTS	
Operações com Vectores	Operações com Normas dos vectores
$\vec{u} = (u_1, u_2) \quad \vec{v} = (v_1, v_2)$	$\ \vec{u}\ ^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad \ \vec{v}\ ^2 = v_1^2 + v_2^2$
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$	$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = (u_1 + v_1)^2 + (v_1 + v_2)^2$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) \\ \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$	$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$